

*Ихсанова Аниса Наримовна*

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ  
ВАРИАЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ  
ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ**

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**КАЗАНЬ – 2004**

Работа выполнена в Отделе краевых задач Научно-исследовательского института математики и механики им Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор, заслуженный деятель науки  
Республики Татарстан  
*Елизаров Александр Михайлович*

Научный консультант: доктор физико-математических наук  
*Фокин Дмитрий Анатольевич*

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор,  
*Маклаков Дмитрий Владимирович*

кандидат физико-математических наук,  
доцент  
*Галявиева Миляуша Салахутдиновна*

Ведущая организация: Казанский государственный  
технический университет (КАИ)  
им. А.Н. Туполева, г. Казань.

Защита состоится 23 декабря 2004 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д212.081.11 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “\_\_” ноября 2004 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат физ.-мат. наук, доцент

А.А. Саченков

**Актуальность работы.** При решении задач аэродинамической оптимизации в ряде случаев эффективными оказываются методы, базирующиеся на теории вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики (ОКЗА). Эти задачи составляют новый раздел гидродинамики течений жидкости и газа с неизвестными границами и имеют практическое применение при проектировании элементов летательных аппаратов и судов на подводных крыльях. Идея решения вариационных ОКЗА состоит в использовании специального оператора, действующего на функции заданного множества так, что каждой функции соответствует профиль с кусочно-гладким контуром. Соответствующий оператор строится на основе интегрального представления решения основной ОКЗА, а множество управляющих функций задается с учетом требований, предъявляемых к проектируемому профилю. После представления оптимизируемой характеристики в виде функционала, определенного на допустимом множестве управляющих функций, решение вариационной ОКЗА сводится к нахождению экстремума этого функционала при дополнительных ограничениях, существенно влияющих на картину разрешимости исходной задачи. В число таких ограничений естественно входят условия разрешимости основной ОКЗА (два условия, обеспечивающих замкнутость контура искомого профиля, и одно условие задания величины скорости потока на бесконечности). Другим ограничением, имеющим физический смысл, является условие фиксации значения величины максимальной скорости потока на контуре искомого профиля.

**Целями настоящей диссертации** являются: развитие численно-аналитических методов проектирования непроницаемого профиля как в неограниченном потоке, так и вблизи прямолинейного экрана, обладающего максимальным коэффициентом подъемной силы, с учетом ограничения на максимум скорости на контуре; составление на основе разработанных методов вычислительных алгоритмов и их программная реализация; анализ влияния величин максимальной скорости и теоретического угла атаки на форму, аэродинамические и геометрические характеристики оптимальных крыловых профилей.

**Научная новизна.** В диссертации исследован новый класс вариационных ОКЗА, учитывающих ограничение на максимум скорости на контуре профиля; разработан численно-аналитический метод решения этих задач, базирующийся на уравнениях Куна - Таккера и протестированный на известных точных решениях; описаны геометрические и аэродинамические характеристики точных решений вариационных ОКЗА в случае гладкого контура; численно

построены формы оптимальных профилей с острой задней кромкой с учетом условия безотрывности обтекания.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается обоснованностью применяемых математических моделей механики жидкости и газа и строгостью используемого математического аппарата, а также верификацией полученных результатов путем решения прямой задачи в пакете Fluent 6.0. Показано хорошее совпадение результатов расчетов с известными точными решениями.

**Практическая ценность.** Разработанные в диссертации численно-аналитические методы, алгоритмы их численной реализации и построенные оптимизированные профили могут быть использованы для проектирования крыльев самолетов дозвуковой авиации и крыльев летательных аппаратов, использующих влияние земли (экранопланов).

**Наиболее существенные научные и практические результаты, полученные лично соискателем:**

- алгоритм численной оптимизации формы крыловых профилей, обтекаемых потоком идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ);
- исследование однозначной разрешимости системы уравнений для нахождения множителей Лагранжа при построении оптимальных профилей; численная процедура ее решения;
- оптимальные безотрывные профили в потоке ИНЖ, полученные с учетом ограничения на максимум скорости;
- обобщение точного и численного решений основной вариационной ОКЗА на случай дозвукового течения газа; алгоритмы численной реализации; формы оптимальных безотрывных профилей;
- метод численной оптимизации профиля крыла экраноплана; оптимальные формы безотрывных крыловых профилей, обтекаемых над прямолинейным экраном.

**Апробация работы.** Результаты диссертации по мере их получения были доложены на семинаре Отдела краевых задач НИИММ им. Н.Г. Чеботарева (руководитель – профессор Н.Б. Ильинский), на Итоговых научных конференциях Казанского государственного университета (г. Казань, 2000 - 2003 гг.), Международной конференции «Нелинейные модели в естественных и гуманитарных науках» (г. Чебоксары, 2001 г.), 5-й Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (г. Казань, 2001 г.), 10-й Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2001 г.), 8-й Четаевской международной конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (г. Казань, 2002 г.), 2-й, 3-й и 4-й Междуна-

родных школах-семинарах «Модели и методы аэродинамики» (г. Евпатория, 2002 - 2004 гг.), Всесоюзных научных школах «Гидродинамика больших скоростей» (г. Чебоксары, 2002 и 2004 гг.), Международной научно-технической конференции молодых ученых и специалистов «Современные проблемы аэрокосмической науки и техники» (г. Жуковский, 2002 г.), 12-й Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (г. Владимир, 2003 г.), 4-м Всемирном конгрессе по вычислительной механике, объединенном со 2-м Азиатско-Тихоокеанским конгрессом по вычислительной механике (г. Пекин, 2004 г.).

**Публикации.** Основное содержание диссертации опубликовано в 9 тезисах докладов, 7 статьях в центральных и региональных изданиях и в 3 публикациях в трудах конференций. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

**Содержание, структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих двенадцать параграфов, заключения, трех приложений и списка литературы. Общий объем диссертации 105 страницы, 15 таблиц, 57 рисунков. Библиографический список состоит из 57 наименований источников отечественных и зарубежных авторов.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** кратко описано развитие методов проектирования крыловых профилей, основанных на теории ОКЗА, и сформулированы цели исследования.

Задачи нахождения формы тел, имеющих экстремальные гидродинамические или аэродинамические характеристики при обтекании жидкостью или газом, возникли с самого начала развития аэрогидродинамики и как чисто теоретические проблемы, и как проблемы важные для приложений. Вариационные ОКЗА реализуют один из подходов к оптимизации аэродинамических форм и в двумерном случае заключаются в построении профилей, обладающих оптимизированными характеристиками (максимальными коэффициентом подъемной силы или аэродинамическим качеством, минимальным коэффициентом сопротивления и др.), обычно при наличии некоторых ограничений (на максимальное значение скорости на контуре, на геометрию профиля и др.). В случае течения идеальной несжимаемой жидкости или дозвукового течения газа в математическом плане они сводятся к вариационным обратным краевым задачам (ОКЗ) для аналитических функций. Решение таких задач позволяет не только предъявить наилучшие формы, но и дать точные оценки оптимизируемых характеристик и тем самым указать инженеру-проектировщику границы допустимого при оптимизации в рамках

применяемых моделей механики жидкости и газа.

По своей постановке вариационные ОКЗА восходят к работе М.А. Лавреньева 1934 г. и могут быть отнесены к задачам оптимального проектирования (см., например, монографию<sup>1</sup>) или к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами (см., например, книгу<sup>2</sup>).

Термин “вариационные краевые задачи”, прежде всего, применительно к задачам теории аналитических функций был предложен Л.А. Аксеньтевым в 1971 г., он же описал схему перехода от классических ОКЗ к вариационным краевым задачам. Термин “вариационные обратные краевые задачи” применительно к ОКЗА введен А.М. Елизаровым в 1990 г.

Ряд ярких результатов по решению вариационных ОКЗА получен в теории струйных и кавитационных течений, при решении оптимизационных задач теории фильтрации с депрессионными кривыми, при построении оптимальных аэродинамических форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях (обзор результатов и библиография изложены в работах А.Л. Гонора и Г.Г. Черного<sup>3</sup>, А.М. Елизарова, Н.Б. Ильинского и А.В. Поташева<sup>4</sup>, А.Н. Крайко<sup>5</sup>, Д.В. Маклакова<sup>6</sup>).

В изученных к настоящему времени вариационных ОКЗ для аналитических функций корректность задач удается исследовать, если множество искомым областей можно задать в виде множества образов канонической области (в частности, внешности единичного круга  $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$  (рис. 1)) для специального класса конформных или квазиконформных отображений, описываемого управлением  $P$ . Перейдя к канонической области, можно представить функционал задачи в виде  $J = J(P)$ , записать на “языке” управления  $P$  все дополнительные ограничения и решать в результате задачу классического вариационного исчисления. Изложенная схема была реализована при решении вариационных ОКЗА А.М. Елизаровым, Е.В. Федоровым, Д.А. Фокиным, а затем Д.Ф. Абзалиловым, Н.Б. Ильинским, Р.Ф. Мардановым. Результаты, связанные с основной вариационной ОКЗА (задачей построения профиля максимальной подъемной силы при ограничении на максимум скорости на его контуре) и некоторыми ее обобщениями (в частности, на случай обтекания профиля вблизи прямолинейного экрана), получены в последние

---

<sup>1</sup>*Haslinger J., Neittaanmaki P.* Finite element approximation for optimal shape design: theory and application. – New York: John Wiley and sons Ltd., 1988. – 335 p.

<sup>2</sup>*Сураетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.

<sup>3</sup>*Гонор А.Л., Черный Г.Г.* В кн. Теория оптимальных аэродинамических форм (под ред. А.Миеле). – М.: Мир, 1969. – С. 292-305, С.379-395.

<sup>4</sup>*Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей. – М.: Физматлит, 1994. – 436с.

<sup>5</sup>*Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. – М.: Наука, 1979. – 447с.

<sup>6</sup>*Маклаков Д.В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами. – М.: Янус-К, 1997. – 281с.

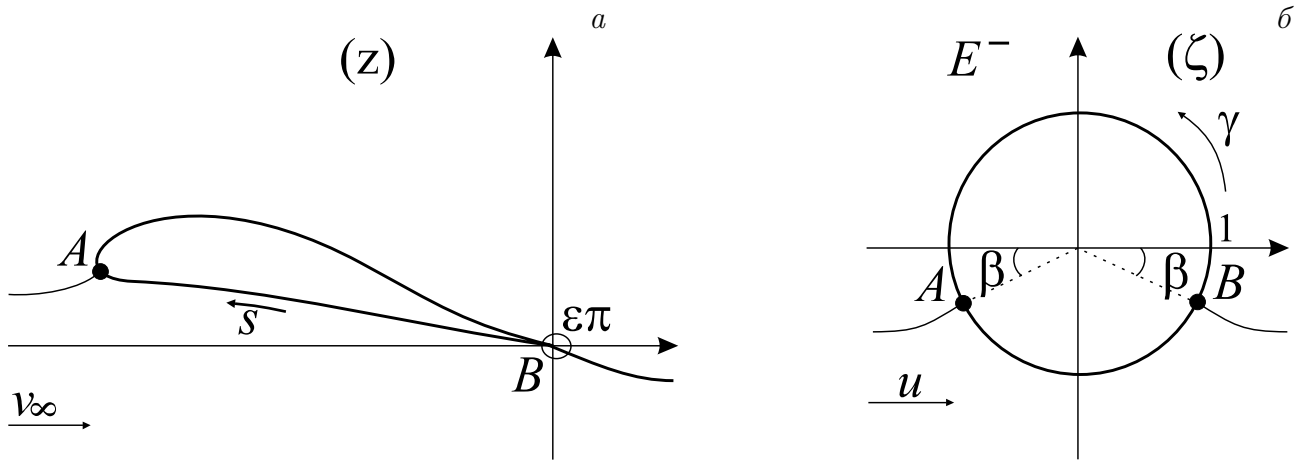


Рис. 1

годы и включены в настоящую диссертацию.

В **первой главе** численно решена вариационная ОКЗА, в которой находится профиль с максимальным коэффициентом подъемной силы в потоке ИНЖ при наличии ограничения на максимум скорости. Построено точное решение для случая полностью гладкого контура. Изложены некоторые положения теории пограничного слоя (ПС). Эти сведения, а также предложенные методы решения используются в последующих главах.

В **п 1.1** приведена физическая постановка основной вариационной ОКЗА, в которой *отыскивается крыловой профиль, обладающий максимальным значением коэффициента подъемной силы, при ограничении на максимальное значение скорости на его контуре*. Профиль в физической плоскости  $z = x + iy$  (рис. 1, а) является гладким (за исключением, возможно, задней кромки, внешний угол  $\epsilon\pi \in [1, 2]$  в которой фиксируется), непроницаемым, имеет фиксированный периметр  $l$  и обтекается потоком ИНЖ с заданной скоростью  $v_\infty = 1$  на бесконечности. Точки  $A$  и  $B$  – точки разветвления и схода потока соответственно,  $s \in [0, l]$  – дуговая координата.

В **п 1.2** описаны математическая модель исходной физической задачи и класс оптимизируемых контуров, т. е. кратко изложены основные положения теории вариационных ОКЗА. Для построения решения в качестве канонической области используется внешность  $E^-$  единичного круга (рис. 1, б), где  $\beta \in [0, \pi/2]$  – так называемый теоретический угол атаки, характеризующий отклонение профиля от направления безциркуляционного обтекания. Основные формулы записываются на “языке” управляющей функции  $P$  и управляющего параметра  $\beta$ . Так коэффициент подъемной силы  $C_y$  может быть записан в виде

$$C_y = 16\pi \sin \beta / J_o(P),$$

где

$$J_o(P) = \int_0^{2\pi} \exp[-P(\tau)] \left| 2 \sin \frac{\tau + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} d\tau, \quad (1)$$

а форма контура может быть восстановлена из следующего соотношения

$$\begin{aligned} x(\gamma) + iy(\gamma) = z_P(\exp(i\gamma)) = 2[J_o(P)]^{-1} \int_{-\beta}^{\gamma} \left| 2 \sin \frac{\tau + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} \times \\ \times \exp \left\{ P(\tau) + i \left[ Q(\tau) + (\varepsilon - 1) \frac{\tau + \beta + \pi}{2} \right] \right\} d\tau, \end{aligned}$$

где аргумент вектора скорости выражается сингулярным интегралом

$$Q(\gamma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \gamma}{2} d\tau.$$

Требование ограниченности максимальной скорости на контуре заданной величиной  $v_{\max}$  и условия разрешимости также могут быть выражены через  $P$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} P(\gamma) \leq \ln[v_{\max}/|2(\sin \gamma + \sin \beta)|] + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|, \\ \int_0^{2\pi} P(\tau) d\tau = 0; \int_0^{2\pi} P(\tau) \exp(i\tau) d\tau = -\pi(\varepsilon - 1) \exp(-i\beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Сформулированы теоремы и замечание, в которых показано, при каких значениях параметров  $v_{\max}$  и  $\beta$  задача имеет решение, когда экстремалью является окружность и когда она отлична от окружности.

В п 1.3 изложено построение численного решения. Обычный подход к нахождению решения оптимизационных задач состоит в замене исходной задачи с ограничениями задачей без ограничений (безусловной оптимизации), например, с помощью метода штрафных функций. В настоящее время более эффективным считается применение так называемых уравнений Куна - Таккера, которые были использованы и в настоящей диссертации. Для решения этих уравнений использовался алгоритм SQP так называемого последовательного квадратичного программирования (в оригинале – Sequential Quadratic Programming), представляющий собой разновидность квазиньютоновского метода оптимизации. При численной оптимизации в рассматриваемых задачах управляющая функция  $P$  задавалась в виде отрезка тригонометрического ряда

$$P(\gamma) = P_N(\gamma) = \sum_{k=2}^{N+1} (a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma),$$



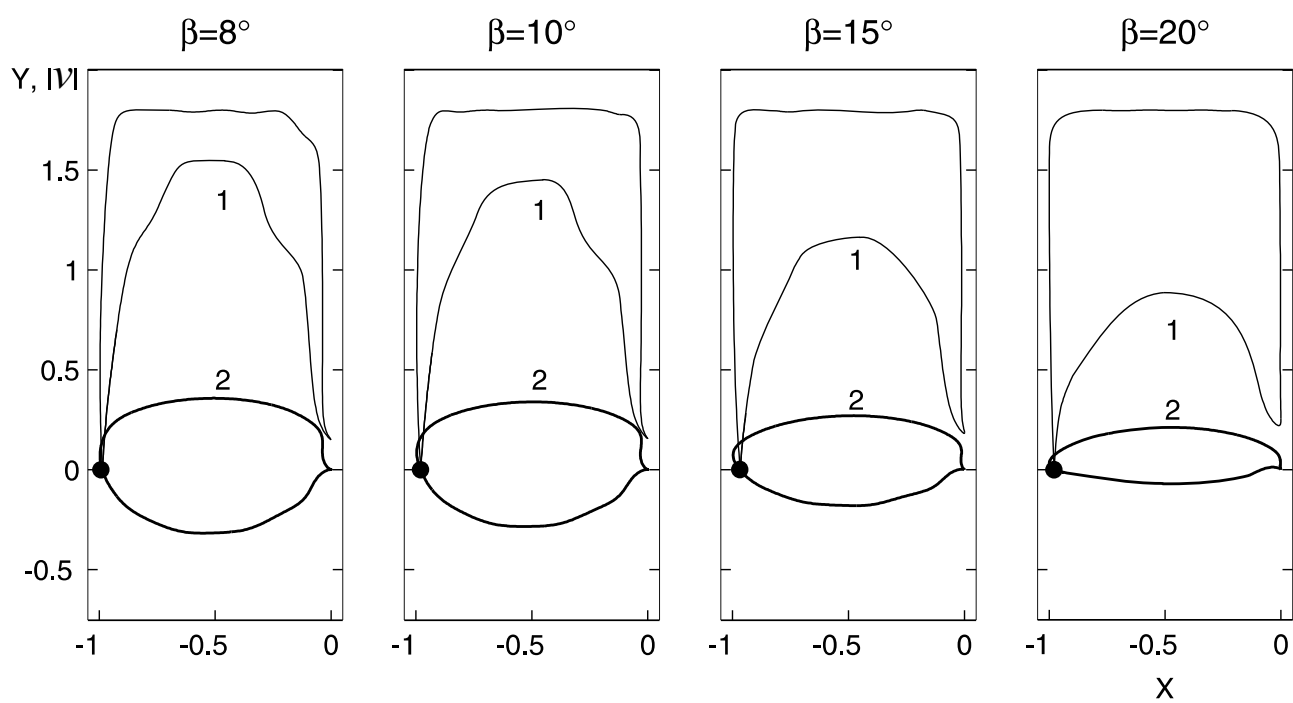


Рис. 2

$\beta^\circ$	$t_{\max}$	$C_y$	$\alpha^\circ$
8	0.6752	1.0874	6.6
10	0.6231	1.3507	6.4475
15	0.4501	1.9728	4.905
20	0.2817	2.4882	1.7537

Таблица 1

$\beta^\circ$	$t_{\max}$	$C_y$	$\alpha^\circ$
8	0.7	1.1	6.7
10	0.6633	1.3715	6.5
15	0.4884	2.0029	5.13
20	0.302	2.535	2.02

Таблица 2

где параметры  $a_0$ ,  $a_1$  и  $b_1$  отсутствуют (обращаются в нуль) в силу условий разрешимости (2). Оптимизация формы контура осуществляется за счет варьирования неизвестных коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $k = \overline{2, N+1}$ . Величина  $N$  фиксируется (как правило, в расчетах бралось  $N = 8$ ). Представлены примеры оптимизированных контуров, полученных численно, а также некоторые их аэродинамические и геометрические характеристики. На рис. 2 (где линии 1 – хордовые диаграммы скорости, а линии 2 – оптимальные контуры) приведены примеры оптимальных контуров, построенные численно для  $\varepsilon = 2$  и  $v_{\max} = 1.8$  без учета условия безотрывности обтекания, а в табл. 1 приведены характеристики этих профилей ( $t_{\max}$  – максимальная толщина профилей,  $\alpha$  – расчетный угол атаки).

В п 1.4 описано построение точного решения задачи для случая гладкого контура<sup>7</sup>, основанное на теореме Куна - Таккера. Экстремальная функция

<sup>7</sup>Елизаров А.М., Фокин Д.А. О точном решении задачи построения профиля максимальной подъемной силы при ограничении на максимум скорости на его контуре// На рубеже веков. Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного

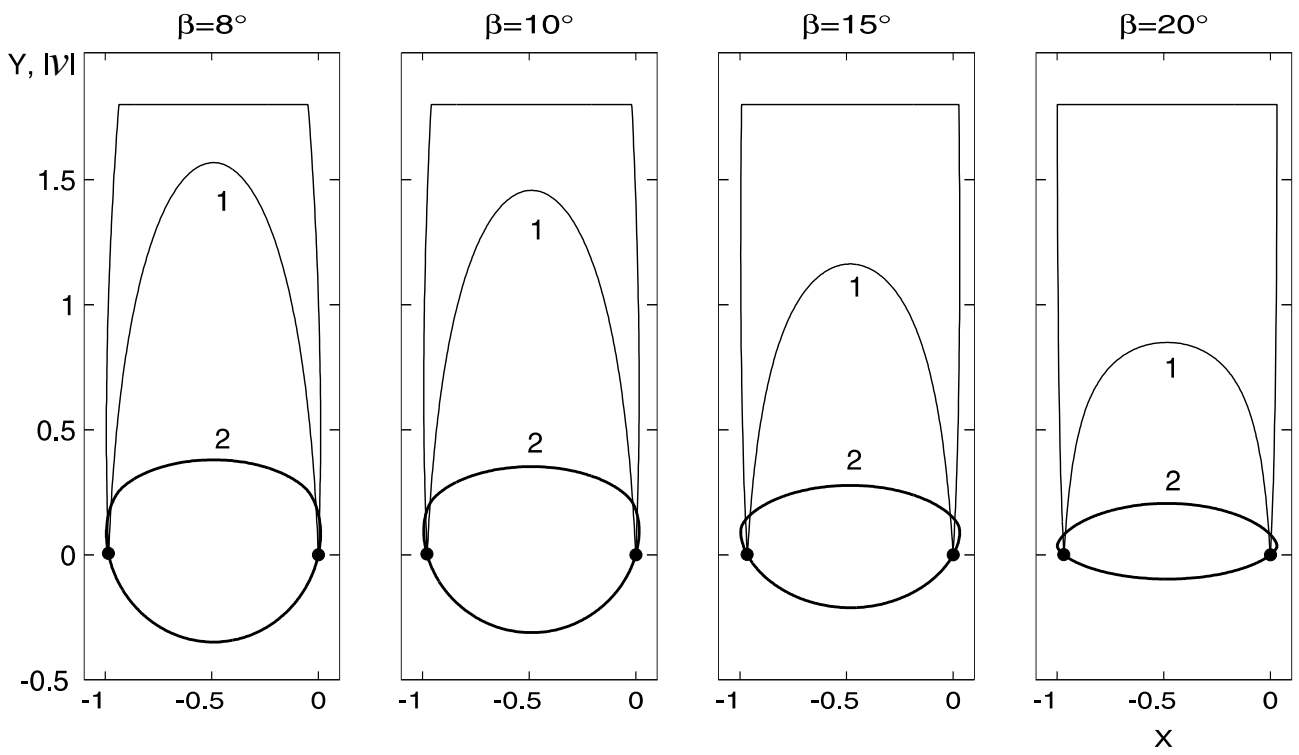


Рис. 3

$P^*(\gamma)$  имеет вид

$$P^*(\gamma) = (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right| - \ln [\mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma + \mu^*(\gamma)], \quad (3)$$

где  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – множители Лагранжа, а множитель Куна - Таккера

$$\mu^*(\gamma) = \max \{0, \quad v_{\max}^{-1} M(\gamma, \beta) - \mu_0 - \mu_1 \cos \gamma - \mu_2 \sin \gamma\},$$

$M(\gamma, \beta) = |2 (\sin \gamma + \sin \beta)|$ . Для нахождения  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  построена система нелинейных уравнений, которая решалась численно. Показаны примеры оптимизированных контуров для случая полностью гладкого контура. Например, на рис. 3 приведены примеры оптимальных контуров для  $v_{\max} = 1.8$  и разных  $\beta$ , а в табл. 2 – соответствующие характеристики.

В п 1.5 исследована система уравнений, служащая для нахождения множителей Лагранжа  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  (см. (3)). Эту систему удалось свести к одному уравнению  $\pi m = \Phi_0(t, m)$ , в котором  $t$  – искомый параметр,  $m$  – параметр, связанный с исходными данными, а

$$\Phi_0(t, m) \equiv (\pi/2 + t)^{-1} \cos t [F_1(t, m) + \pi \ln v_{\max}] + F_2(t, m),$$

где  $F_1(t, m) = \int_t^{\pi/2} \ln \left| \frac{\sin \gamma + m}{\sin \gamma + \sin \beta} \right| d\gamma$  и  $F_2(t, m) = \int_t^{\pi/2} \ln \left| \frac{\sin \gamma + m}{\sin \gamma + \sin \beta} \right| \sin \gamma d\gamma$ . Доказана единственность решения этой системы и реализована численная процедура её решения.

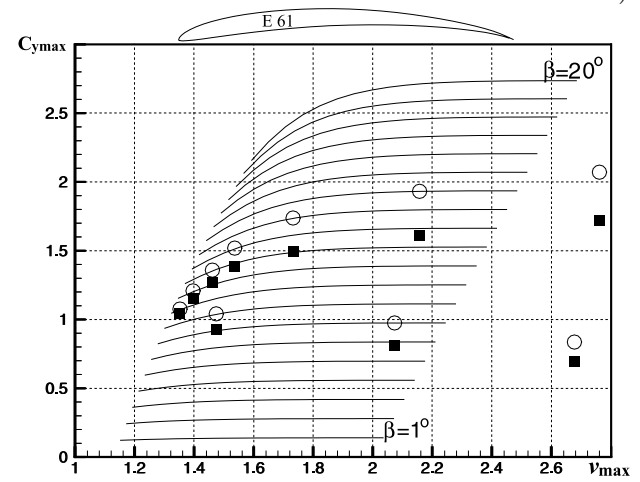
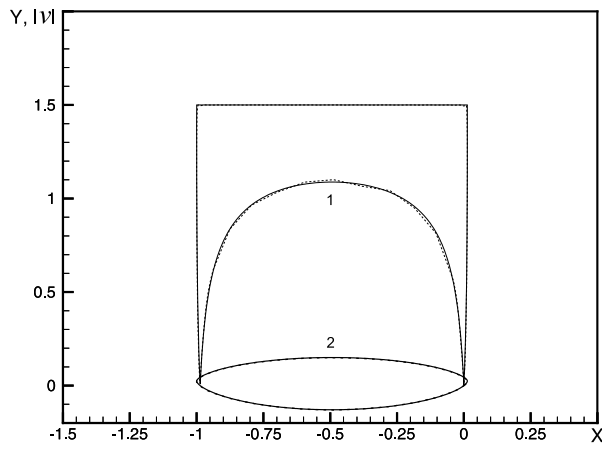


Рис. 4

$C_y$	$t_{\max}$	$T$
точное решение		
1.278	0.2793	6.95
численное решение		
1.2776	0.2795	149

Таблица 3

$\beta$	$t_{\max}$	$C_y$	$\alpha^o$
8	0.3225	0.9833	3.339
10	0.2961	1.2172	2.8319
15	0.2562	1.787	2.3077

Таблица 4

В п 1.6 приведены результаты вычислительных экспериментов и проведены сравнения результатов. Одно из сравнений точного и численного решений (соответственно сплошная и пунктирная линии) представлено на рис. 4, а, на которой изображены оптимальный контур, построенный при  $\beta = 10^\circ$  и  $v_{\max} = 1.5$ , и соответствующая хордовая диаграмма скорости. Характеристики профиля представлены в табл. 3, где  $T$  – время в секундах, затраченное на расчет на компьютере с процессором Intel Pentium 4 с тактовой частотой 2 ГГц и оперативной памятью 512 Мб. Сравнения показали хорошую работоспособность численного алгоритма, и поэтому он был применен для построения оптимальных безотрывных профилей. Максимальные коэффициенты подъемной силы  $C_{y_{\max}}$ , полученные при точном решении, были сопоставлены с коэффициентами  $C_y$  известных профилей НАСА 6% и профиля E61<sup>8</sup>. Так на рис. 4, б сплошными линиями изображены зависимости  $C_{y_{\max}} = C_{y_{\max}}(v_{\max})$  максимального значения  $C_{y_{\max}}$  коэффициента подъемной силы от величины  $v_{\max}$  при разных  $\beta$ . По построению при любом фиксированном  $\beta$  точка с координатами  $(v_{\max}, C_y)$  не может оказаться выше соответствующей линии на этой фигуре. Здесь же квадратами отмечены значения  $C_y$  для фиксиро-

университета 1998 – 2002гг. Казань. Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003. – С.200-212.

<sup>8</sup>Eppler R. Airfoil Design and Data. Berlin: Springer-Verlag, 1990, 512p.

$M_\infty$	$C_y$	$t_{\max}$	$\alpha^o$
0.3	0.7793	0.3683	0
0.5	0.7784	0.3278	-1.4
0.6	0.7643	0.2512	-2.62

Таблица 5

$h$	$C_y$	$t_{\max}$	$\alpha^o$
численное решение			
$\infty$	1.3846	0.8386	9.233
точное решение			
$\infty$	1.3854	0.853	8.9552

Таблица 6

ванных  $v_{\max}$  и  $\beta$ , полученные в результате обдува в аэродинамической трубе профиля Е61 (этот профиль изображен в верхней части рисунка), а кружками – экстремальные значения  $C_{y\max}$ , полученные при тех же значениях  $\beta$  и  $v_{\max}$  на основе точного решения. Как видно, при малых  $v_{\max}$  и  $\beta$  результаты близки, а при увеличении  $v_{\max}$  и  $\beta$  –  $C_{y\max}$  отличается значительно. Для обеспечения безотрывного характера обтекания искомого профиля в качестве дополнительного ограничения при оптимизации было использовано условие<sup>9</sup>

$$f(s) \geq f_o, f(s) = \frac{av'(s)}{|v(s)|} \left[ \int_0^{2\pi} |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right], \quad (4)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $f_o$  – эмпирические постоянные, а  $v(s)$  – распределение скорости по контуру профиля, однозначно связанное с управляющей функцией  $P(\gamma)$  и теоретическим углом атаки  $\beta$ . На рис. 5 приведены примеры безотрывных оптимальных профилей для  $v_{\max} = 1.8$  при разных  $\beta$ , рассчитанные для полностью турбулентного ПС по методу Кочина - Лойцянского. Некоторые аэродинамические характеристики показаны в табл. 4

**Вторая глава** посвящена решению задачи проектирования профиля, обладающего максимальным коэффициентом подъемной силы при обтекании дозвуковым потоком вязкого газа. Вязкость потока учитывается в приближении пограничного слоя при задании условия безотрывного обтекания, а сжимаемость – в рамках модели газа Чаплыгина.

**В п 2.1** дана постановка соответствующей вариационной ОКЗА. Заданы плотность  $\rho$  потока, скорость  $\lambda_\infty$  на бесконечности (которая однозначно связана с числом Маха  $M_\infty$ ), угол  $\varepsilon\pi$  в задней кромке и периметр  $l$  контура профиля. *Требуется определить форму крылового профиля, обладающего максимальным коэффициентом подъемной силы, и его аэродинамические и геометрические характеристики при обтекании дозвуковым потоком вязкого газа.*

**В п 2.2** изложена схема решения соответствующей вариационной ОКЗА.

---

<sup>9</sup>Ильинский А.Н., Ильинский Н.Б., Поляков Д.В., Поташев А.В., Степанов Г.Ю. Уточнение критерия отрыва турбулентного пограничного слоя с использованием эмпирических данных// Препринт НИИ ММ им. Н.Г. Чеботарева № 98-2. Казань – 1998. –62с.

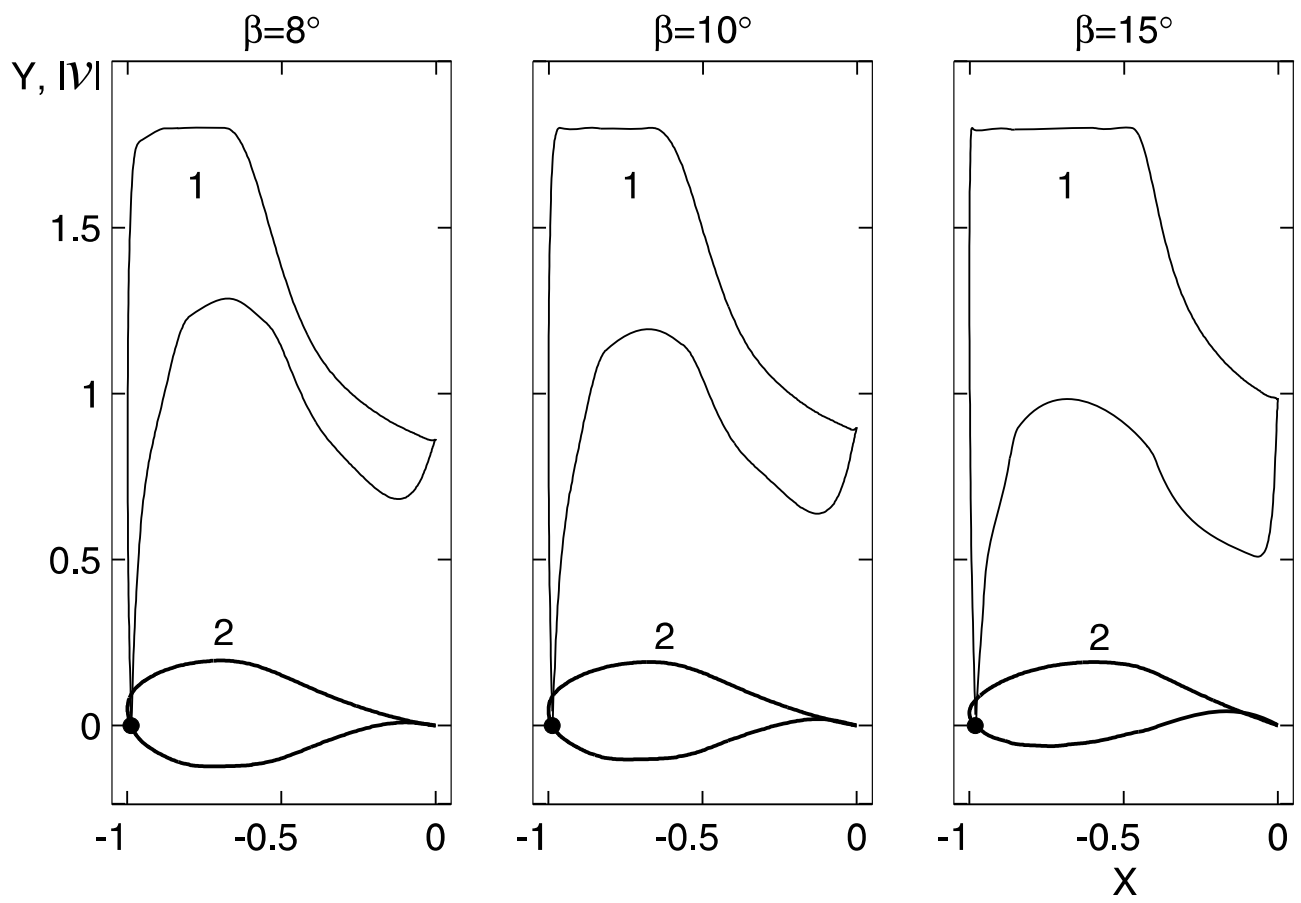


Рис. 5

Учет сжимаемости базируется на использовании линейных уравнений газовой динамики, записанных в плоскости годографа скорости – уравнений Чаплыгина. Записывается минимизируемый функционал

$$I_c(P) = \int_0^{2\pi} \left| 2 \sin \frac{\tau + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} e^{-P(\tau)} \left[ 1 - c^2 e^{2P(\tau)} M^2(\tau, \beta) \left| 2 \sin \frac{\tau + \beta}{2} \right|^{2-2\varepsilon} \right] d\tau,$$

(где  $c^2$  – постоянная интегрирования, выбираемая из условия наилучшей аппроксимации адиабатических зависимостей, в частности,  $c^2 = 0.296$ ) через управляющую функцию  $P(\gamma)$  и параметр  $\beta$ , а также условия разрешимости. Отметим, что при  $c^2 = 0$  (что соответствует переходу к модели ИНЖ) функционал  $I_c(P)$  совпадает с (1). Аналогично первой главе в случае гладкого контура построено точное решение, а экстремальная управляющая функция принимает вид

$$P^*(\gamma) = -\ln \frac{g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma) + \sqrt{g^2(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma) - 4c^2 M^2(\gamma, \beta)}}{2},$$

где

$$g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma) \equiv \mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma + \mu(\gamma),$$

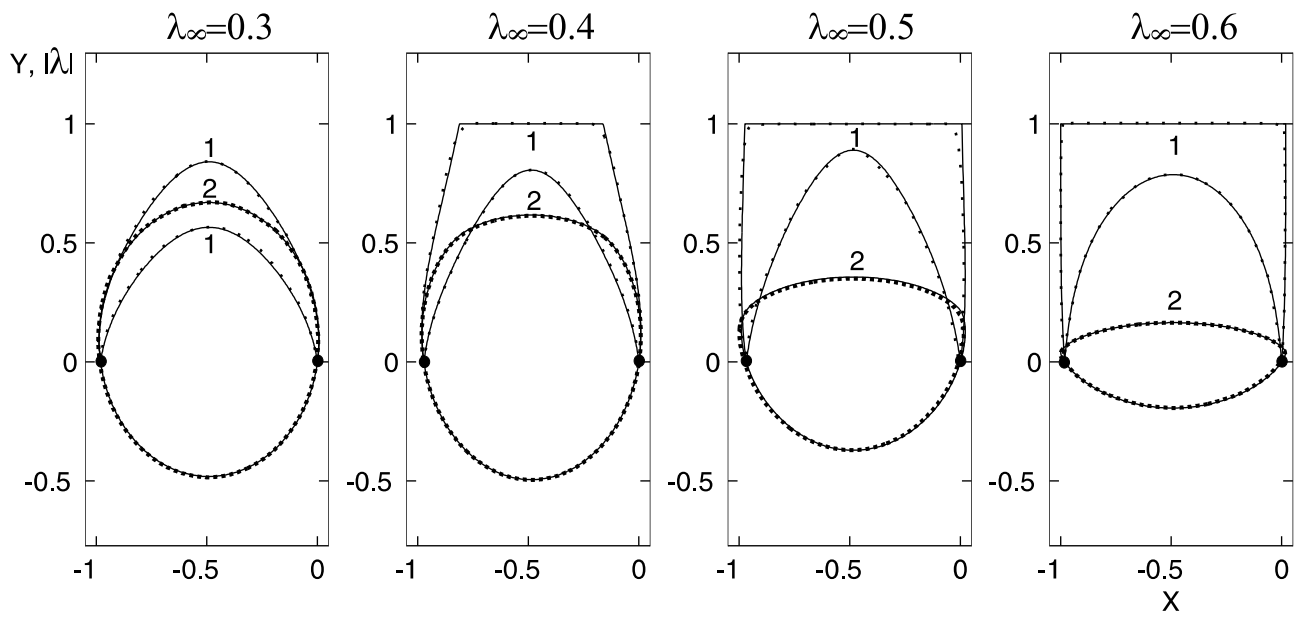


Рис. 6

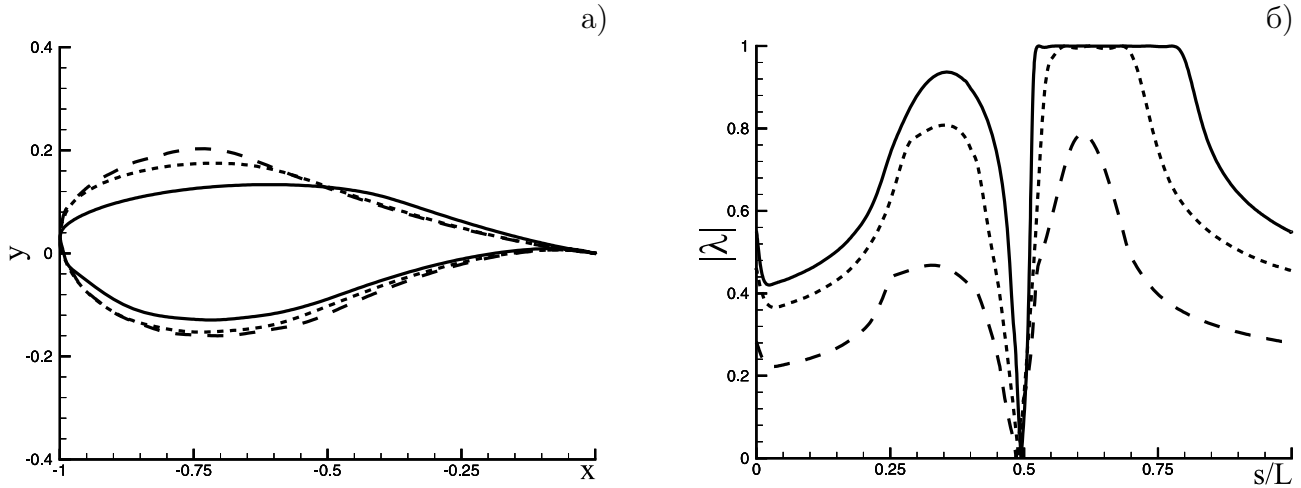


Рис. 7

а

$$\mu^*(\gamma) = \max \left\{ 0, \quad v_{\max}^{-1} M(\gamma, \beta) - \mu_0 - \mu_1 \cos \gamma - \mu_2 \sin \gamma \right\}.$$

Численная оптимизация также проведена на основе уравнений Куна - Таккера.

В п 2.3 проиллюстрированы вычислительные эксперименты. Проведены сравнения точного и численного решений для случая полностью гладкого контура. На рис. 6 показано сравнение точного (сплошная линия) и численного (пунктирная линия) решений для  $\beta = 10^\circ$ . Характеристики этих решений практически совпали, что дало основание применить численный алгоритм для оптимизации формы безотрывных профилей с заостренной задней кромкой. В качестве примера на рис. 7, а показаны оптимальные безотрывные профили для различных чисел Маха на бесконечности (сплошная линия со-

а)

б)

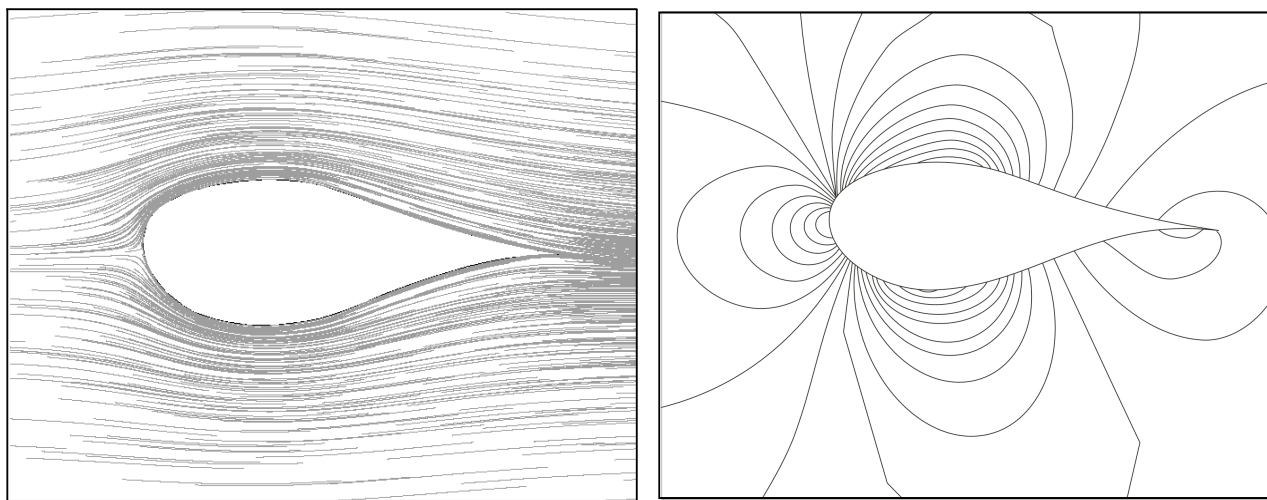


Рис. 8

ответствует –  $M_\infty = 0.3$ , пунктирная –  $M_\infty = 0.5$ , штриховая –  $M_\infty = 0.6$ ), а на рис. 7, б изображены соответствующие распределения скорости. В табл. 5 представлены некоторые характеристики этих профилей. Для верификации полученных результатов был взят профиль с  $M_\infty = 0.5$  (пунктирный контур на рис. 7, а) с хордой, равной 1 м, и рассчитан в пакете Fluent 6.0. Скорость набегающего потока была задана равной  $v_\infty = 165$  м/с<sup>2</sup>. Область течения была покрыта сеткой, состоящей из трех частей: пограничный слой, ближняя неструктурированная сетка и дальняя сетка. Такое построение сеток позволяет уменьшить расчетное время. Расчет обтекания проводился в предположении турбулентности ПС. На рис. 8, а изображены линии тока, которые показывают наличие безотрывного течения, а на рис. 8, б показаны изобары. Коэффициент подъемной силы, полученный при расчете в пакете Fluent 6.0, равен  $C_y = 0.625328$ .

В **третьей главе** дана постановка задачи оптимизации формы профиля вблизи экрана для достижения наибольшей подъемной силы при условии, что введено ограничение на максимум скорости. Подробно изложен метод построения интегрального представления решения. В качестве канонической области используется внешность двух единичных кругов, симметричных относительно оси абсцисс. В этом случае способ построения оптимизируемого функционала является естественным обобщением задачи оптимизации формы изолированного профиля. Численно построены формы оптимизируемых профилей, проведены исследования влияния экрана на их аэродинамические характеристики.

В п 3.1 описана физическая постановка задачи, в которой *требуется найти форму контура (рис. 9, а), обтекаемого вблизи прямолинейного экра-*

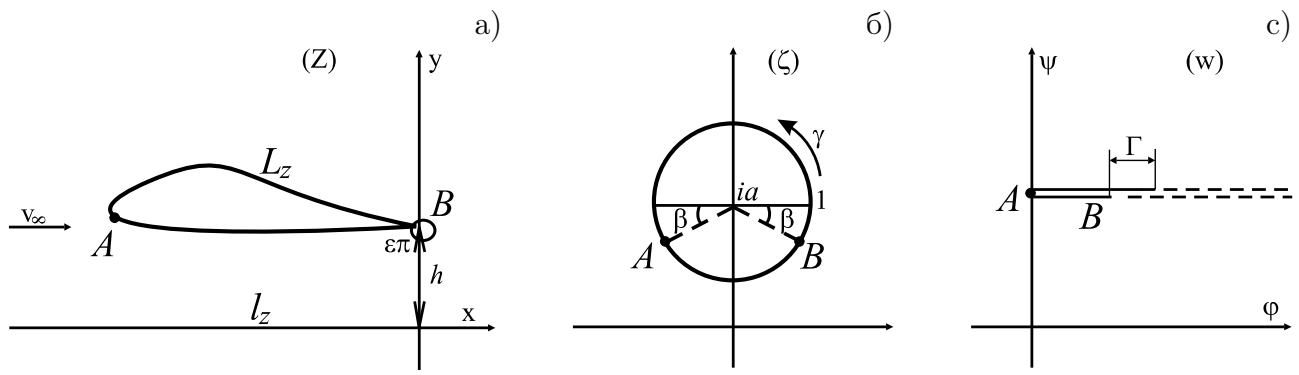


Рис. 9

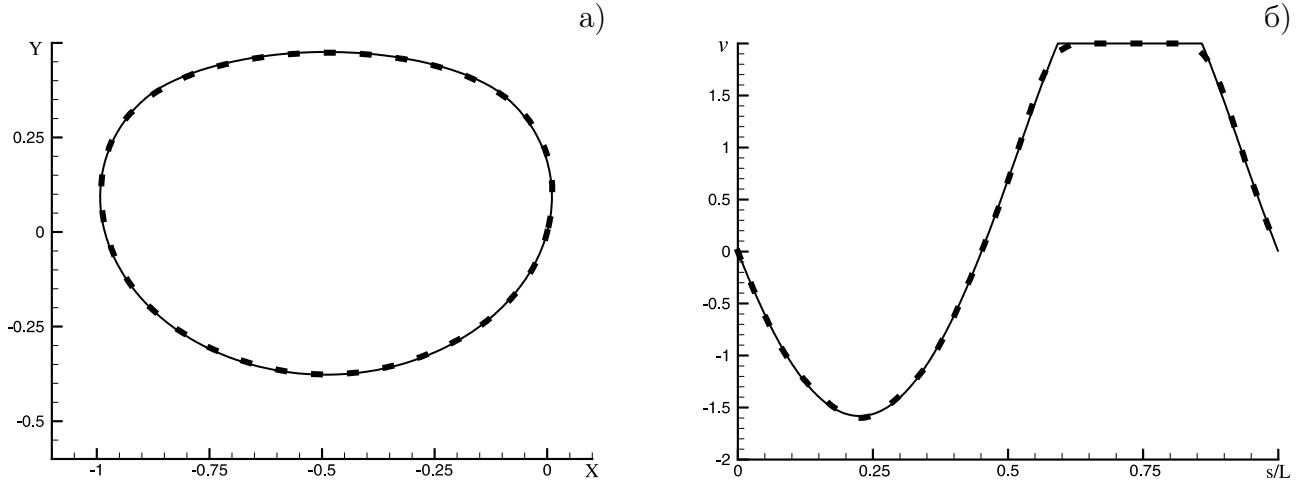


Рис. 10

на потоком идеальной несжимаемой жидкости, максимизирующую коэффициент  $C_y$  подъемной силы профиля, ограниченного этим контуром, при условии, что задано максимальное значение скорости на контуре. Фиксируются: скорость набегающего потока, внешний угол  $\epsilon\pi$ , периметр контура и отстояние  $h$  задней кромки  $B$  профиля от экрана.

В п 3.2 изложен метод решения. Отыскивается аналитическая функция, реализующая конформное отображение верхней полуплоскости с вырезом в виде единичного круга, у которого центр расположен в точке  $ai$  (где  $a > 1$ ), (рис. 9, б) на внешность искомого контура (рис. 9, а). Построение комплексного потенциала  $w$  (рис. 9, с) этого течения в форме, удобной для решения задачи, осуществлено по схеме, предложенной Д.А. Фокиным<sup>10</sup>. Записаны оптимизируемый функционал и условия разрешимости соответствующей ОК-ЗА.

В п 3.3 описан алгоритм численной оптимизации и представлены сравнения численного решения для  $h = \infty$  с точным решением, полученным в

<sup>10</sup> Фокин Д.А. Аэродинамическое проектирование и оптимизация крыловых профилей методами обратных краевых задач// Дис., ... докт. физ. - мат. наук. – Казань, 2000. –203с.



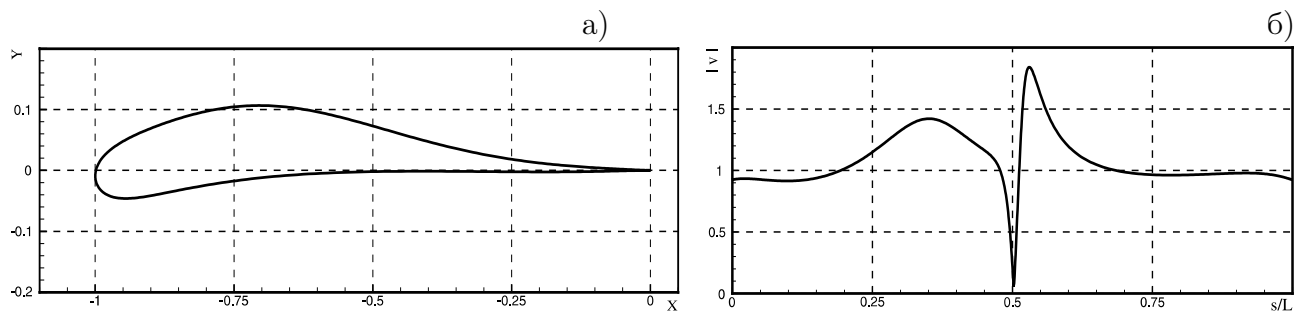


Рис. 11

первой главе. Приведены примеры оптимальных профилей для разных отстояний от экрана. На рис. 10 показано сравнение оптимальных контуров (рис. 10, а) и соответствующих распределений скоростей (рис. 10, б) для  $h = \infty$ ,  $\beta = 10^\circ$  и  $v_{\max} = 2.0$  (пунктирная линия – численное решение, сплошная линия – точное решение). Соответствующие характеристики представлены в табл. 6. На рис. 11, а приведен пример оптимального безотрывного профиля, отстоящего от экрана на 0.1 величины хорды, построенного при  $\beta = 10^\circ$ ,  $v_{\max} = 1.84$ . Соответствующее распределение скорости представлено на рис. 11, б. Полученный при этом коэффициент  $C_y = 0.0301$ .

В **заключении** кратко подведены итоги выполненной работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Развиты и численно реализованы методы построения безотрывных крыловых профилей, обладающих максимальным коэффициентом подъемной силы при ограничении на максимум скорости на их контуре, обтекаемых ИНЖ или дозвуковым потоком газа.

2. Разработаны алгоритмы численной оптимизации формы крыловых профилей в безграничном потоке и над прямолинейным экраном.

3. Исследована однозначная разрешимость системы уравнений для нахождения множителей Лагранжа в случае построения оптимального профиля, обтекаемого потоком ИНЖ, и разработана численная процедура её решения.

4. На основе анализа результатов построения крыловых профилей, обладающих максимальным коэффициентом подъемной силы при ограничении на максимальное значение скорости на их контуре, сделаны выводы о влиянии исходных физических параметров на аэродинамические и геометрические характеристики оптимальных форм.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №03-01-00015), программы “Университеты России” (проект УР 04.01.009), Фонда НИОКР РТ и Федеральной целе-

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Ихсанова А.Н.* Численная максимизация коэффициента подъемной силы крылового профиля с ограничением на максимум скорости// Труды Математического центра Н.И. Лобачевского. Т. 7. Краевые задачи аэрогидромеханики и их приложения// Материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Г.Г. Тумашева. – Казань: Изд-во “ДАС”, 2000, С. 358.

2. *Ихсанова А.Н.* Численная оптимизация формы крыла экраноплана методами вариационных обратных краевых задач/ *А.М. Елизаров, А.Н. Ихсанова, Д.А. Фокин*// Обозрение прикладной и промышленной математики. – Т. 8. – М.: Науч. изд-во “ТВП”, 2001. С. 165-167.

3. *Ихсанова А.Н.* Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики для двусвязных областей/ *А. М. Елизаров, А. Н. Ихсанова, Д. А. Фокин* // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 8. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы// Материалы V Казанской международной летней школы-конференции. – Казань: Изд-во “ДАС”, 2001. С. 99-102.

4. *Ихсанова А.Н.* Сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов в задачах оптимизации формы крыловых профилей с ограничением на максимум скорости// Первая научно-практическая конференция молодых ученых и специалистов “Исследования и перспективные разработки в авиационной промышленности”. – М. 2002. С. 75-79.

5. *Ихсанова А.Н.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимизации формы крыловых профилей с ограничением на максимум скорости в бесконечном потоке и над экраном// Модели и методы аэродинамики. Материалы I и II Международных школ-семинаров. – М.: Изд-во Московского Центра непрерывного математического образования. 2002. – С. 93-94.

6. *Ихсанова А.Н.* Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики для двусвязных областей// Лобачевские чтения – 2003. Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 21./ Материалы Третьей всероссийской молодежной научной школы-конференции. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2003. – С. 124-129.

7. *Ихсанова А.Н.* Численная оптимизация формы крыловых профилей в безграничном потоке и над экраном при ограничении на максимум скорости/ *А.М. Елизаров, А.Н. Ихсанова, Д.А. Фокин* // Модели и методы аэро-

динамики. Материалы Третьей Международной школы-семинара. – М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования. 2003. С. 42-43.

8. *Ихсанова А.Н.* Вариационная обратная краевая задача для дозвукового течения газа/*А.М. Елизаров, А.Н. Ихсанова, Д.А. Фокин*//Вторая научно-практическая конференция молодых ученых и специалистов “Исследования и перспективные разработки в авиационной промышленности”. – М. 2004. С. 52-57.

9. *Ихсанова А.Н.* Точные и численно-аналитические решения основной вариационной обратной краевой задачи аэрогидродинамики/*А.М. Елизаров, А.Н. Ихсанова, Д.А. Фокин*// Модели и методы аэродинамики. Материалы Третьей Международной школы-семинара. – М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования. 2004. – С. 43-44.

10. *Ihsanova A.N.* Variational inverse boundary-value problems of aerodynamics for subsonic gas flow/*A.M. Elizarov, D.A. Fokin, A.N. Ihsanova*//Computational Mechanics. WCCM VI in conjunction with APCOM'04. – 2004. – P. 436-443.

11. *Ихсанова А.Н.* Оптимальное аэродинамическое проектирование крыловых профилей при ограничении на максимум скорости/*А.М. Елизаров, А.Н. Ихсанова, Д.А. Фокин*//Изв. вузов. Авиационная техника. 2004. № 3. С. 32-36.

12. *Ихсанова А.Н.* Основная вариационная обратная краевая задача аэрогидродинамики: модели обтекания, точные оценки, численно-аналитические решения/*А.М. Елизаров, А.Н. Ихсанова, Д.А. Фокин*// Препринт НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета № 04/1. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2004. – 112 с.

13. *Ихсанова А.Н.* Численная оптимизация формы профиля крыла экраноплана// Модели механики сплошной среды. Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 27./Материалы XVII сессии Международной школы по модели механики сплошной среды. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2004.